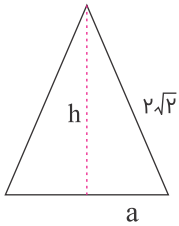




گزینه ۱

۱

$$h^2 + a^2 = (2\sqrt{2})^2 \Rightarrow h^2 + a^2 = 8 \Rightarrow a = \sqrt{8 - h^2}$$



مساحت مثلث متساوی الساقین برابر است با:

$$S = \frac{h \cdot 2a}{2} = h \cdot a \Rightarrow S = h \sqrt{8 - h^2}$$

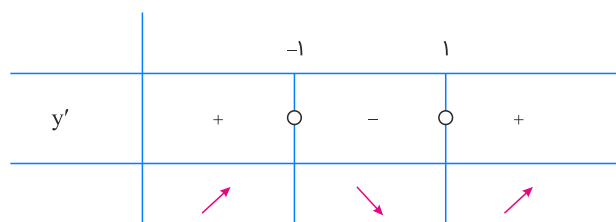
مشتق را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$S' = \sqrt{8 - h^2} - \frac{2h^2}{2\sqrt{8 - h^2}} = 0 \Rightarrow 8 - h^2 = h^2 \Rightarrow h^2 = 4 \Rightarrow h = 2$$

پس ماکزیمم مساحت به ازای $h = 2$ به دست می‌آید.

$$\max(S) = S(2) = 2\sqrt{8 - 4} = 2 \times 2 = 4$$

$$y' = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$



تابع در $x = 1$ دارای مینیمم نسبی است، پس:

$$f(1) > 0 \Rightarrow 1 - 3 + m - 2 > 0 \Rightarrow m > 4$$

تابع f در $x = 0$ مشتق دارد، زیرا $f'(0) = 0$ است. شیب خطوط مماس برای x های منفی، منفی است و برای x های مثبت، مثبت است. اما توجه کنید که قدر مطلق شیبهای خطوط مماس در x های منفی بزرگتر از شیبهای مماس در x های مثبت است. به بیان دیگر تابع f در x های منفی نزولی و در x های مثبت صعودی است.

$$a^2 + b^3 = 15 \Rightarrow b = \sqrt[3]{15 - a^2}$$

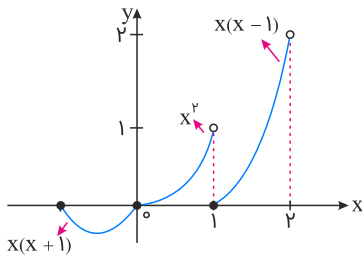
$$ab = a \times \sqrt[3]{15 - a^2} = \sqrt[3]{15a^3 - a^5} \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{15 \times 3a^2 - 5a^4}{3 \sqrt[3]{(15a^3 - a^5)^2}} = 0$$

$$\Rightarrow 15(3a^2) - 5a^4 = 0 \Rightarrow 5a^2(9 - a^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = \pm 3 \end{cases}$$

اگر $a = 0$ باشد، $ab = 0$ می شود. اگر $a = \pm 3$ باشد، داریم:

$$\begin{cases} a = 3 \Rightarrow ab = 3 \sqrt[3]{15 - 9} = 3 \sqrt[3]{6} \\ a = -3 \Rightarrow ab = -3 \sqrt[3]{15 - 9} = -3 \sqrt[3]{6} \end{cases}$$

سعی می‌کنیم نمودار این تابع را رسم می‌کنیم:



$$f(x) = x(x - [x])$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow f(x) = x^2$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow f(x) = x(x - 1)$$

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow f(x) = x(x + 1)$$

مطابق شکل تابع در نقطه $(0, 0)$ فقط $\min$ نسبی دارد. چون به ازای $x < 0$ تابع مقادیر منفی را نیز می‌پذیرد، پس این نقطه نمی‌تواند $\min$ مطلق هم باشد.

برای پیدا کردن نقاط بحرانی اول دامنه تابع را تعیین می‌کنیم.

$$f(x) = x\sqrt{3-x} \quad D_f = (-\infty, 3]$$

اولین نقطه بحرانی تابع در $x = 3$ رخ می‌دهد (نقاط ابتدایی و انتهایی دامنه جزو نقاط بحرانی محسوب می‌شوند). حالا مشتق می‌گیریم:

$$f'(x) = (1)\sqrt{3-x} + \frac{-1}{2\sqrt{3-x}} \times x = 0 \Rightarrow \sqrt{3-x} = \frac{x}{2\sqrt{3-x}}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 2(3-x) = x \Rightarrow 6 - 2x = x \Rightarrow x = 2$$

در $x = 2$ مشتق صفر است و نقطه‌ای با این طول برای تابع بحرانی محسوب می‌شود.

برای آنکه $x = ۳$ نقطه بحرانی تابع f باشد ولی اکسترمم نسبی آن نباشد، لازم است که $x = ۳$ ریشه مکرر زوج معادله $f'(x) = ۰$ شود، چون ریشه‌های ساده و مکرر فرد f' (که f' در آن‌ها هم صفر می‌شود و هم تغییر علامت می‌دهد) هم جزء نقاط بحرانی تابع f هستند و هم اکسترمم نسبی آن.

$$f(x) = \frac{x^2 - ax + ۳}{x + b} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x - a)(x + b) - (1)(x^2 - ax + ۳)}{(x + b)^2}$$

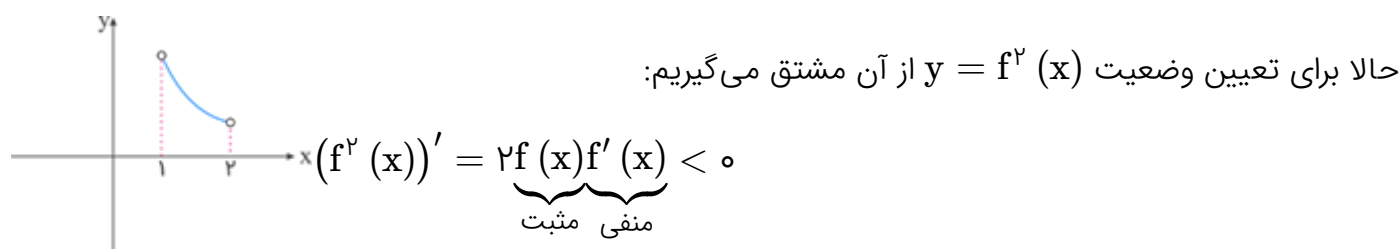
$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(2x^2 + 2bx - ax - ab) - (x^2 - ax + ۳)}{(x + b)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{x^2 + 2bx - ab - ۳}{(x + b)^2} \xrightarrow{f'(x)=0} x^2 + 2bx - ab - ۳ = ۰$$

برای آنکه این معادله، ریشه مضاعف $x = ۳$ داشته باشد، باید به صورت $(x - ۳)^2 = x^2 - ۶x + ۹$ باشد، پس:

$$\begin{cases} 2b = -۶ \Rightarrow b = -۳ \\ -ab - ۳ = ۹ \xrightarrow{b=-۳} 3a - ۳ = ۹ \Rightarrow a = ۴ \Rightarrow a - b = ۴ - (-۳) = ۷ \end{cases}$$

باتوجه به شکل می‌توان فهمید که اولاً $f(x) > ۰$ است، چراکه نمودار تابع همواره بالای محور x ‌ها است. به علاوه این نمودار اکیداً نزولی است، پس $f'(x) < ۰$ می‌شود.



چون مقدار مشتق $f^2(x)$ همواره منفی است، پس این تابع اکیداً نزولی است.

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = x^2 + 2ax + b$$

جدول تعیین علامت مشتق باید به صورت زیر باشد:

x	-1	3
f'	+	-
f	↗	↘

یعنی ۱- و ۳ ریشه‌های مشتق هستند.

$$\text{جمع ریشه‌ها: } \frac{-2a}{1} = 3 + (-1) \Rightarrow a = -1$$

$$\text{ضرب ریشه‌ها: } \frac{b}{1} = 3(-1) \Rightarrow b = -3$$

ما حاصل $b - a$ را می‌خواهیم:

$$b - a = -3 - (-1) = -2$$

ابتدا عرض نقاط بحرانی تابع را مشخص کرده و سپس مقادیر را در بی‌نهایت دورها نیز مشخص می‌کنیم (حد در بی‌نهایت تابع). داریم:

$$y' = \frac{1(1+x^2) - 2x \cdot x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \Rightarrow y' = 0 \xrightarrow{\text{صورت مشتق}} 1-x^2 = 0$$

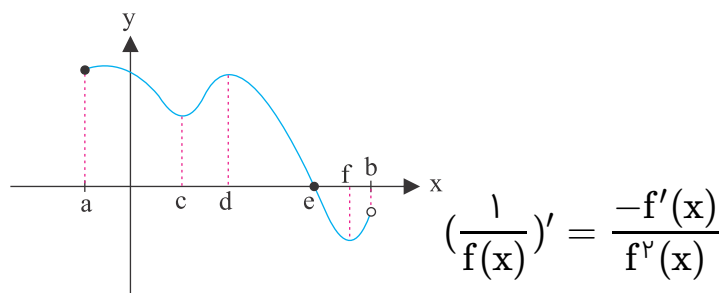
$$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow y(1) = \frac{1}{2} \\ x=-1 \Rightarrow y(-1) = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$$

بین عرض‌های به‌دست‌آمده مقایسه کرده و بیشترین عرض را به عنوان ماکزیمم مطلق و کمترین عرض را به عنوان مینیمم مطلق معرفی می‌کنیم. داریم:

$$y_{\max} = \frac{1}{2}, y_{\min} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{اختلاف مقادیر اکسترمم مطلق} = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$$

برای پیدا کردن نقاط بحرانی $y = \frac{1}{f(x)}$ ، باید از ضابطه آن مشتق بگیریم:



نقاطی از دامنه که $f'(x)$ صفر است یا موجود نیست، بحرانی است.

پس نقاط بحرانی تابع، $x = a$ ، $x = c$ و $x = d$ و $x = f$ هستند. به علاوه چون $x = e$ در دامنه تابع $y = \frac{1}{f(x)}$ نیست، نمی‌تواند بحرانی باشد.

اول نقاط بحرانی $f(x) = \frac{2x^2 - \sqrt{x}}{2}$ را در فاصله $[0, 1]$ پیدا می‌کنیم:

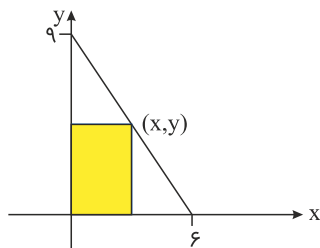
$$f'(x) = \frac{4x - \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2} = 0 \Rightarrow 4x = \frac{1}{2\sqrt{x}} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 16x^2 = \frac{1}{4x}$$

$$\Rightarrow 64x^3 = 1 \Rightarrow x^3 = \frac{1}{64} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

نقاط $x = 0$ و $x = 1$ هم نقاط ابتدا و انتهای دامنه و بحرانی هستند. حالا مقادیر تابع را در نقاط بحرانی آن پیدا می‌کنیم:

$$f(0) = 0, f(1) = \frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{16}$$

کمترین مقدار از بین مقادیر بالا مینیمم مطلق تابع را نشان می‌دهد که برابر $-\frac{3}{16}$ است.



ابتدا معادله خط AB را محاسبه می‌کنیم:

$$m = \frac{9 - 0}{0 - 6} = \frac{-3}{2} \Rightarrow y - 9 = \frac{-3}{2} (x - 0) \Rightarrow y = \frac{-3}{2}x + 9$$

$$\Rightarrow \text{مساحت مستطیل} : S = xy = x \left(\frac{-3}{2}x + 9 \right) = \frac{-3}{2}x^2 + 9x$$

سپس مشتق می‌گیریم و مشتق را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$S' = -3x + 9 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$\Rightarrow \text{مساحت مستطیل} \xrightarrow{x=3} S_{\max} = \frac{-3}{2}(3)^2 + 9(3) = \frac{-27}{2} + 27 = \frac{27}{2} = 13.5$$

توابع را بررسی می‌کنیم:

الف) $y' = 3ax^2 + b$

مشتق این تابع، درجه دوم است و ممکن است گاهی مثبت و گاهی منفی باشد.

ب) $y' = 2x^3 + a$

x	$-\sqrt[3]{\frac{a}{2}}$
y'	$- \quad 0 \quad +$

این تابع قطعاً غیر یکنوا است.

ج) تابع $\sqrt[3]{x}$ همواره صعودی اکید است، پس تابع $a\sqrt[3]{x} + b$ یکنوای اکید است.

د) $y' = a \times \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}$

اگر y' را تعیین علامت کنیم گاهی مثبت و گاهی منفی خواهد بود، پس این تابع قطعاً غیر یکنوا است.

ابتدا طول نقاط اکسترمم نسبی تابع را مشخص می‌کنیم. داریم:

$$f'(x) = \frac{a(x^2 + 1) - 2x(ax)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{a(x^2 + 1 - 2x^2)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{a(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$$

ریشه‌های صورت کسر f' ، $x = \pm 1$ بوده و تابع f' در $x = 1$ و $x = -1$ تغییر علامت می‌دهد، پس طول نقاط اکسترمم نسبی f' ، $x = 1$ و $x = -1$ است، داریم:

$$A(1, \frac{a}{2}) \quad , \quad B(-1, \frac{-a}{2})$$

معادله خطوط مماس در این دو نقطه به صورت $y = \frac{a}{2}$ و $y = \frac{-a}{2}$ است. فاصله این دو خط از هم $|a|$ است که باید برابر با ۲۰ باشد، داریم:

$$\text{فاصله خطوط مماس} = |a| = 20 \xrightarrow{a > 0} a = 20$$

با داشتن $a = 20$ ، مقدار $f(2)$ را مشخص می‌کنیم، داریم:

$$f(x) = \frac{20x}{x^2 + 1} \Rightarrow f'(2) = \frac{20(2)}{2^2 + 1} = \frac{40}{5} = 8$$

دامنه تابع $(-\infty, 1]$ است پس $x = 1$ بحرانی است. به علاوه تابع در $x = 0$ پیوسته نیست، پس $x = 0$ هم بحرانی است.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2\sqrt{1-x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2 - x) = 0$$

در $x = 0$ ناپیوسته، مشتق ناپذیر و بحرانی است.

حالا از تابع مشتق می گیریم:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x - 1; x < 0 \\ \frac{-2}{2\sqrt{1-x}}; x > 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow -2x - 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

در $x = -\frac{1}{2}$ هم مشتق صفر می شود و تابع نقطه بحرانی دارد، پس نقاط بحرانی $x = 0$ ، $x = 1$ و $x = -\frac{1}{2}$ هستند.

اگر x مسافت طی شده با سرعت ثابت v در مدت زمان t باشد، رابطه $x = vt$ یا معادل آن $t = \frac{x}{v}$ برقرار است. بنابراین:

$$D \text{ تا } P \text{ مسیر} : t_1 = \frac{PD}{v} = \frac{1}{v} \sqrt{12 + x^2}$$

$$E \text{ تا } D \text{ مسیر} : t_2 = \frac{DE}{v} = \frac{\lambda - x}{v}$$

$$E \text{ به } P \text{ کل زمان از} : t = t_1 + t_2 \Rightarrow t(x) = \frac{1}{v} \sqrt{12 + x^2} + \left(2 - \frac{1}{v}x\right) ; x \in [0, \lambda]$$

برای آنکه فاصله زمانی رسیدن دو شرکت کننده حداکثر باشد، لازم است شرکت کننده B خود را در کوتاهترین زمان ممکن به E برساند، پس باید به دنبال یافتن مقدار مینیمم مطلق t باشیم. نقطه بحرانی t را به دست می آوریم:

$$t'(x) = \frac{1}{v} \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 12}} - \frac{1}{v} = \frac{2x - \sqrt{x^2 + 12}}{2\sqrt{x^2 + 12}}$$

$$\Rightarrow t'(x) = 0 \Rightarrow 2x - \sqrt{x^2 + 12} = 0$$

$$\Rightarrow 4x^2 = x^2 + 12 \Rightarrow x = \sqrt{4} = 2$$

دقت کنید که ابتدا و انتهای بازه یعنی ۰ و ۸ هم بحرانی هستند.

$$t(0) = \frac{1}{v} \sqrt{12} + 2 = \sqrt{3} + 2 = 3/7$$

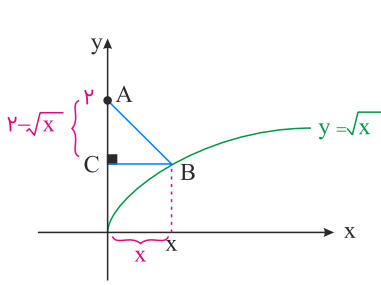
$$t(2) = \frac{1}{v} \sqrt{12 + 4} + 2 - \frac{1}{v} = 2 + 1/5 = 3/5$$

$$t(8) = \frac{1}{v} \sqrt{12 + 64} = \frac{1}{v} \sqrt{76} = \frac{1}{v} (8/7) = 4/35$$

x	۰	۲	۸
$t'(x)$	-	۰	+
$t(x)$	۳/۷	۳/۵	۴/۳۵

بر طبق جدول وقتی x (یعنی فاصله D از C) برابر ۲ است، زمان رسیدن شرکت کننده B به نقطه E ، کمترین زمان ممکن یعنی $3/5$ ساعت را دارا است و هنگامی که $x = 8$ باشد (مسیر با قایق طی شده)، یعنی شرکت کننده A در مدت زمان $4/35$ ساعت خود را به نقطه E رسانده است. پس حداکثر فاصله زمانی رسیدن دو شرکت کننده A و B برابر است با:

$$4/35 - 3/5 = 0/85h \xrightarrow{\times 60} 0/85 \text{ min}$$



$$S = \frac{x(2 - \sqrt{x})}{2}$$

حالا مشتق را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$S' = \frac{1}{2}(2 - \sqrt{x} - \frac{x}{2\sqrt{x}}) = 0$$

$$\Rightarrow 2 - \sqrt{x} = \frac{x}{2\sqrt{x}} \Rightarrow 4 - 2\sqrt{x} = \sqrt{x} \Rightarrow 3\sqrt{x} = 4 \Rightarrow x = \frac{16}{9}$$

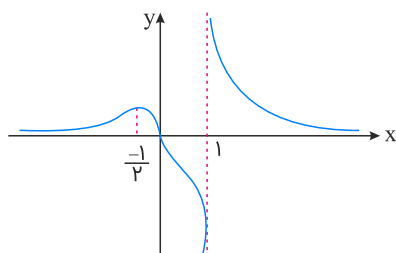
$$\max(S) = S\left(\frac{16}{9}\right) = \frac{\frac{16}{9}\left(2 - \frac{4}{3}\right)}{2} = \frac{\frac{16}{9} \times \frac{2}{3}}{2} = \frac{16}{27}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(x-1) - \sqrt[3]{x}}{(x-1)^2}$$

حالا مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{x-1-3x}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{-1-2x}{3\sqrt[3]{x^2}(x-1)^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

تابع در $x = 0$ و $x = -\frac{1}{2}$ نقطه بحرانی دارد ولی $x = 1$ در دامنه تابع نیست و نمی‌تواند بحرانی باشد. از طرفی تابع در $x = 0$ مشتق‌پذیر نیست چون مخرج آن صفر می‌شود، بنابراین در $x = -\frac{1}{2}$ دارای نقطه بحرانی است و مشتق‌پذیر هم می‌باشد. نمودار این تابع به شکل زیر است:



۱) تابعی که قرار است بهینه شود مساحت شکل است که از یک مستطیل و یک نیم‌دایره تشکیل شده:

$$S(a, b) = \pi ab + \frac{1}{2}\pi(\pi a)^2 = \pi ab + \pi a^2 \quad (*)$$

۲) می‌دانیم محیط شکل برابر $\lambda_{00} + 200\pi \text{ cm}$ است، بنابراین:

$$2a + 2(\pi b) + \frac{1}{2}(2\pi)(\pi a) = \lambda_{00} + 200\pi$$

$$\Rightarrow 2a + 2\pi b + \pi a = \lambda_{00} + 200\pi \Rightarrow b = \frac{\lambda_{00} + 200\pi - 2a - \pi a}{2\pi}$$

۳) با جایگذاری b در رابطه $(*)$ ، مساحت شکل به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} S(a) &= \pi a \left(\frac{\lambda_{00} + 200\pi - 2a - \pi a}{2\pi} \right) + \pi a^2 \\ &= \frac{1}{2}\lambda_{00}a + 100a\pi - \lambda a^2 - \pi a^2 + \pi a^2 = \frac{1}{2}\lambda_{00}a + 100a\pi - \lambda a^2 \end{aligned}$$

۴) حال به منظور بهینه شدن S ، مشتق آن باید برابر صفر شود:

$$\begin{aligned} S'(a) = 0 &\Rightarrow \frac{1}{2}\lambda_{00} + 100\pi - \lambda a - \pi a = 0 \Rightarrow 100(\pi + \lambda) - a(\pi + \lambda) = 0 \\ \Rightarrow a &= \frac{100(\pi + \lambda)}{\pi + \lambda} = 100 \end{aligned}$$